2010年7月進研

B3 △ABC を底面とする三角錐 OABC があり，OA = OB = OC = 4，AB = 4，BC = 6，∠ABC = 60° である。

(1) 辺 AC の長さを求めよ。

(2) 三角錐 OABC の体積を求めよ。

(3) 4点O，A，B，Cを通る球の半径を求めよ。

（配点　20）

(1) △ABCで余弦定理より

$AC^2 = 4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\cos60^\circ$

$= 16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}$

$= 28$

AC>0より $AC = 2\sqrt{7}$

(2) △ABCで正弦定理より

$2R = \frac{AC}{\sin60^\circ}$

$= \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\therefore R = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

Oから平面ABCにおろした垂線と平面ABCの交点Hは△ABCの外心となるので△OCHで三平方の定理より

$OH^2 = OC^2 - CH^2$

$= 4^2 - \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2$

$= 16 - \frac{84}{9}$

$= \frac{60}{9}$

∴OH>0より $OH = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

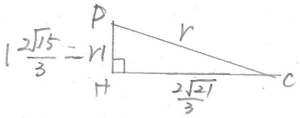
よって 体積 $V = \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\sin60^\circ\right)\cdot\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$= 4\sqrt{5}$

(3) 求める球の中心Pは直線OH上に存在する。球の半径をrとすると



△PCHにおいて

OP = CP = r より

$PH = \left|\frac{2\sqrt{15}}{3} - r\right|$ なので

$r^2 = \left(\frac{2\sqrt{15}}{3}-r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2$

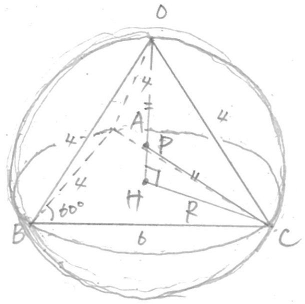
$r^2 = \frac{60}{9} - \frac{4\sqrt{15}}{3}r + r^2 + \frac{84}{9}$

$\frac{4\sqrt{15}}{3}r = \frac{144}{9}$

$r = \frac{144}{9}\cdot\frac{3}{4\sqrt{15}} = \frac{12}{\sqrt{15}}$

$= \frac{12\sqrt{15}}{15}$

$= \frac{4\sqrt{15}}{5}$



2011年7月進研

B3 △ABC において AB = 3，AC = $3\sqrt{3}$，$\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。また，点 D は辺 BC 上にあり，AD = $\sqrt{3}$BD を満たしている。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 BD の長さを求めよ。

(3) △ABC の外接円の中心を O とする。点 O を通り平面 ABC に垂直な直線上に点 P をとり，四面体 PABD をつくる。四面体 PABD の体積が $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ になるとき，cos∠PAO の値を求めよ。

（配点　20）

(1) △ABCで余弦定理より

$BC^2 = 3^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot3\cdot3\sqrt{3}\cos A$

$= 9+27-2\cdot3\cdot3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= 54$

BC>0より $BC = 3\sqrt{6}$

(2) BD = x とすると AD = $\sqrt{3}x$

△ABCで余弦定理より

$\cos B = \frac{9+54-27}{2\cdot3\cdot3\sqrt{6}}$

$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

△ABDで余弦定理より

$(\sqrt{3}x)^2 = 3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\frac{\sqrt{6}}{3}$

$2x^2+2\sqrt{6}x-9=0$

$(\sqrt{2}x+3\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})=0$

x>0より $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore BD = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ より

$\sin^2 A = 1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$

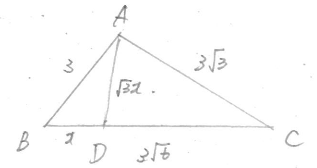
sinA>0より $\sin A = \frac{\sqrt{6}}{3}$

△ABCで正弦定理より

$2R = \frac{BC}{\sin A}$

$= \frac{3\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$= 9$　　$\therefore R = \frac{9}{2}$



また四面体PABDの体積が $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ となればよいので

$\frac{1}{3}\triangle ABD\cdot OP = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

ここで $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$ より

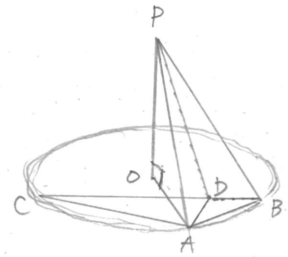
$\sin^2 B = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

sinB>0より $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

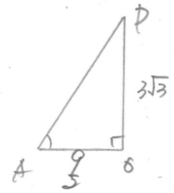
$\therefore \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin B\right)\cdot OP = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot OP = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

$\therefore OP = 3\sqrt{3}$



∴△PADにおいて



$PA^2 = (3\sqrt{3})^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2$

$= \frac{189}{4}$

PA>0より $PA = \frac{3\sqrt{21}}{2}$

$\therefore \cos\angle PAO = \frac{AO}{PA} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{21}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$= \frac{\sqrt{21}}{7}$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

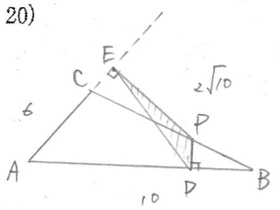
2012年7月進研

B3 ∠Cが鈍角である△ABCにおいて，AB＝$5k$，BC＝$\sqrt{10}k$，CA＝$3k$（$k>0$）とする。
また，△ABCの面積は18である。

(1) $\cos A$ の値を求めよ。

(2) k の値を求めよ。また，$\sin B$，$\sin C$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) 辺BC（両端を除く）上の点Pから直線AB，ACにそれぞれ垂線PD，PEを引く。
△PDEの面積が $\frac{9}{10}$ であるとき，線分BPの長さを求めよ。　　（配点　20）



(1) △ABCで余弦定理より

$\cos A = \dfrac{25k^2+9k^2-10k^2}{2\cdot 5k\cdot 3k}$

$= \dfrac{24k^2}{2\cdot 5\cdot 3k^2}$

$= \dfrac{4}{5}$

(2) $\sin^2 A = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$\sin A>0$ より $\sin A = \frac{3}{5}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 3k\cdot \sin A$ より

$18 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{3}{5}\cdot k^2$

∴ $k^2=4$

$k>0$ より $k=2$

△ABCで正弦定理より

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B}$

$\sin B = CA\cdot \dfrac{\sin A}{BC}$

$= 6\cdot \dfrac{\frac{3}{5}}{2\sqrt{10}}$

$= \dfrac{9\sqrt{10}}{50}$

同様に

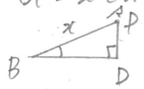
$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$\sin C = AB\cdot \dfrac{\sin A}{BC}$

$= 10\cdot \dfrac{\frac{3}{5}}{2\sqrt{10}}$

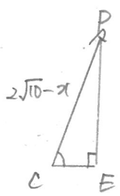
$= \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(3) BP＝x とおくと



$\sin B = \dfrac{9\sqrt{10}}{50}$ より

$\dfrac{PD}{BP} = \dfrac{9\sqrt{10}}{50}$ ∴ $PD = \dfrac{9\sqrt{10}}{50}x$



△CPEにおいて

∠PCEは(2)で求めた∠Cを用いると

$\sin\angle PCE = \sin(180°-C)$

$= \sin C$

$= \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ より

$\dfrac{PE}{CP} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ より　$PE = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}(2\sqrt{10}-x)$

ここで四角形ADPEは ∠ADP＋∠ACP＝180°なので円に内接する四角形である。

よって ∠DPE ＝ 180°−∠DAE より

$\sin\angle DPE = \sin(180°-\angle DAE)$

$= \sin A$

$= \frac{3}{5}$

よって△PDEの面積は

$\frac{1}{2}\cdot PD\cdot PE\cdot \sin\angle DPE = \frac{9}{10}$ より

$\frac{1}{2}\cdot \frac{9\sqrt{10}}{50}x\cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}(2\sqrt{10}-x)\cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

$\frac{9}{50}x(2\sqrt{10}-x) = 1$

$9x^2-18\sqrt{10}x+50=0$

$(3x-\sqrt{10})(3x-5\sqrt{10})=0$

∴ $x = \dfrac{\sqrt{10}}{3},\ \dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

$3 \quad -5\sqrt{10} \to -15\sqrt{10}$
$3 \quad -\sqrt{10} \to -3\sqrt{10}$
$-18\sqrt{10}$

Pは線分BC上より $0<x<2\sqrt{10}$ より

∴ $BP = \dfrac{\sqrt{10}}{3},\ \dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

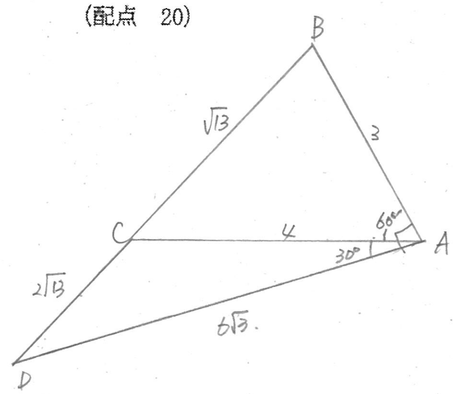
2013年7月進研

B3 AB＝3，∠A＝60°の△ABCがあり，△ABCの外接円の半径は $\frac{\sqrt{39}}{3}$ である。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) 辺ACの長さを求めよ。また，$\tan B$ の値を求めよ。

(3) 直線BC上に∠BAD＝90°となるように点Dをとる。線分ADの長さを求めよ。また，線分ACを折り目として，△ACDを折り曲げ，平面ABCと平面ACDが垂直になるようにする。折り曲げた後の点Dに対して，線分BDの長さを求めよ。　　（配点　20）



(1) △ABCで正弦定理より

$\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$

∴ $BC = 2\cdot \dfrac{\sqrt{39}}{3}\cdot \sin 60°$

$= 2\cdot \dfrac{\sqrt{39}}{3}\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{13}$

(2) AC＝x とすると

△ABCで余弦定理より

$(\sqrt{13})^2 = 3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cos 60°$

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$x>0$ より $x = AC = 4$

$\cos B = \dfrac{3^2+(\sqrt{13})^2-4^2}{2\cdot 3\cdot \sqrt{13}}$

$= \dfrac{9+13-16}{2\cdot 3\cdot \sqrt{13}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

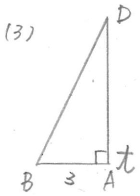
$1+\tan^2 B = \dfrac{1}{\cos^2 B}$ より

$\tan^2 B = 13-1 = 12$

$\cos B>0$ より $0°<B<90°$

よって $\tan B>0$ なので $\tan B = 2\sqrt{3}$

(3)



△ABDにおいて

$\tan B = \dfrac{AD}{AB}$

∴ $AD = AB\cdot \tan B$

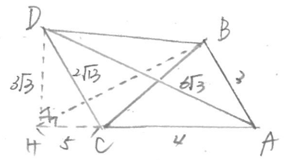
$= 3\cdot 2\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

また $BD^2 = 3^2+(6\sqrt{3})^2 = 117$

$BD>0$ より $BD = 3\sqrt{13}$

よって $CD = 2\sqrt{13}$



垂直に折り曲げた後，Dから平面ABCに垂線DHをおろすと，Hは直線AC上

∴ $DH^2 = CD^2-CH^2 = AD^2-AH^2$ より

$52-CH^2 = 108-(4+CH)^2$

$52-CH^2 = 108-16-8CH-CH^2$

$8CH = 40$

∴ $CH = 5$

よって $DH^2 = 27$　$DH>0$ より $DH = 3\sqrt{3}$

また△ABHで余弦定理より

$BH^2 = 3^2+9^2-2\cdot 3\cdot 9\cdot \cos 60°$

$= 9+81-2\cdot 3\cdot 9\cdot \frac{1}{2}$

$= 63$

よって△BDHより

$BD^2 = BH^2+DH^2$

$= 63+27$

$= 90$

$BD>0$ より $BD = 3\sqrt{10}$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

2014年7月進研

B3 △ABCにおいて，AB＝5，BC＝$3\sqrt{5}$，$\tan A = -\frac{3}{4}$ である。

(1) $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺ACの長さを求めよ。

(3) ∠BCD＝90° かつ CD＝$\frac{\sqrt{5}}{2}$ である点Dを，直線BCに関して点Aと同じ側にとり，直線ACと直線BDとの交点をEとする。線分DEの長さを求めよ。　（配点　20）

(1) $\tan A = -\frac{3}{4} < 0$ より A は鈍角.

$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A$ より

$= 1 + (-\frac{3}{4})^2$

$= \frac{25}{16}$

∴ $\cos^2 A = \frac{16}{25}$

$\cos A < 0$ より $\cos A = -\frac{4}{5}$ //

(2) AC = x とおくと.

△ABC で余弦定理より

$(3\sqrt{5})^2 = 5^2 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cdot\cos A$

$45 = 25 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cdot(-\frac{4}{5})$

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$(x-2)(x+10) = 0$

$x > 0$ より $x = AC = 2$ //

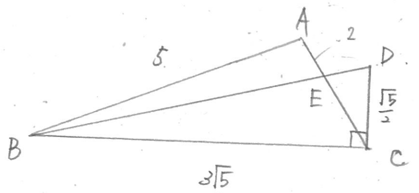
(3) △BCD より

$BD^2 = (3\sqrt{5})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{2})^2$

$= \frac{180+5}{4}$

$= \frac{185}{4}$

$BD > 0$ より $BD = \frac{\sqrt{185}}{2}$



ここで BE : EC = △BCE : △CDE である.

△ABC で余弦定理より $\cos C = \frac{45+4-25}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

∴ $\sin^2 C = 1 - (\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{5}$

$\sin C > 0$ より $\sin C = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

また $\sin\angle DCE = \sin(90° - C)$

$= \cos C$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$ より

△BCE : △CDE = $\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot CE\cdot\sin C : \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot CE\cdot\sin\angle DCE$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot CE\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot CE\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

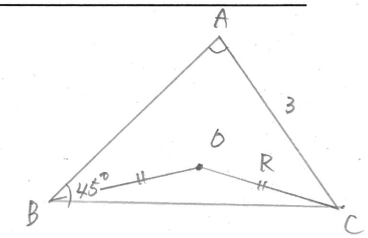
$= 3 : 1$.

よって BE : ED = 3 : 1 より

$DE = \frac{1}{4}\cdot BD = \frac{\sqrt{185}}{8}$ //

2015年7月進研

B3 △ABCがあり，AC＝3，∠ABC＝45°，$\cos\angle BAC = \frac{1}{3}$ である。



(1) $\sin\angle BAC$ の値を求めよ。また，辺BCの長さを求めよ。

(2) △ABCの外接円の中心をOとする。△OBCの面積を求めよ。

(3) (2)のとき，△OBCを底面とし，BP＝CP＝OP＝BC である点Pを頂点とする四面体POBCをつくる。四面体POBCの体積を求めよ。　（配点　20）

(1) $\sin^2\angle BAC = 1 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$

$\sin\angle BAC > 0$ より $\sin\angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ //

△ABC で正弦定理より

$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{3}{\sin 45°}$

$BC = \frac{3}{\sin 45°}\cdot\sin\angle BAC$

$= \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= 4$ //

(2) 外接円の半径をRとすると

△ABCで正弦定理より

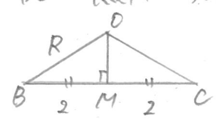
$2R = \frac{3}{\sin 45°} = 3\sqrt{2}$

∴ $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

△OBC は二等辺三角形より

O から BC におろした垂線は

BC の中点 M と交わるので



$OM^2 = R^2 - 2^2$

$= \frac{9}{2} - 4$

$= \frac{1}{2}$

$OM > 0$ より $OM = \frac{1}{\sqrt{2}}$

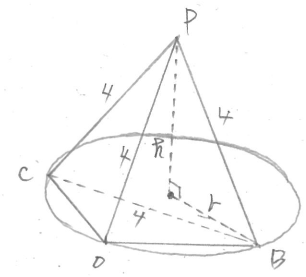
よって $\triangle OBC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ //

(3) BP = CP = OP より

P から平面 OBC におろした

垂線は △OBC の外心で交わる.

△OBC の外接円の半径を r とする.



(2) より △OBC = $\sqrt{2}$ なので

$\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC = \sqrt{2}$.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\angle BOC = \sqrt{2}$

∴ $\sin\angle BOC = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

△OBC で正弦定理より

$2r = \frac{BC}{\sin\angle BOC}$

$= \frac{4}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$

$= \frac{9\sqrt{2}}{2}$

∴ $r = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

よって四面体の高さを h とすると

$h^2 = 4^2 - r^2$

$= 16 - \frac{162}{16}$

$= \frac{94}{16}$

$h > 0$ より $h = \frac{\sqrt{94}}{4}$

256
162
94　47
8

よって体積 $V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OBC\cdot h$

$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{94}}{4}$

$= \frac{\sqrt{47}}{6}$ //

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

2010年7月進研

B4 xの3次式 $P(x)=x^3-3ax^2+(2a^2+a)x+b$ があり，$P(2a)=0$ を満たしている。ただし，a，b は実数の定数とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 方程式 $P(x)=0$ のすべての解が実数であるとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) 方程式 $P(x)=0$ が重解をもつとき，a の値を求めよ。また，そのときの $P(x)=0$ の解をすべて求めよ。

（配点　20）

(1) $P(2a)=0$ より

$8a^3-3a\cdot4a^2+(2a^2+a)\cdot2a+b=0$

$8a^3-12a^3+4a^3+2a^2+b=0$

$\therefore\ b=-2a^2$

(2) (1)より

$P(x)=x^3-3ax^2+(2a^2+a)x-2a^2$

$P(2a)=0$ より

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3a & 2a^2+a & -2a^2 & 2a \\ & 2a & -2a^2 & 2a & \\ \hline 1 & -a & a & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2a)(x^2-ax+a)$

$P(x)=0$ の解は $x-2a=0$ より

$x=2a$

これは実数解である。

これと $x^2-ax+a=0$ の解が実数解をもてばよいので判別式を D とすると

$D=(-a)^2-4a\geqq0$

$a(a-4)\geqq0$

$\therefore a\leqq0,\ 4\leqq a$

(3) (i) $x^2-ax+a=0$ が重解をもつとき

$D=a(a-4)=0$ より $a=0,\ 4$.

$a=0$ のとき $P(x)=x^3=0$ より

3重解 $x=0$.

$a=4$ のとき $P(x)=(x-8)(x^2-4x+4)$

$=(x-8)(x-2)^2=0$ より

$x=8$，重解 $x=2$.

(ii) $x^2-ax+a=0$ が $x=2a$ を解にもつとき

$(2a)^2-a\cdot2a+a=0$

$2a^2+a=0$

$a(2a+1)=0\quad\therefore a=0,\ -\frac{1}{2}$.

$a=0$ のときは (i) と同様

$a=-\frac{1}{2}$ のとき $P(x)=(x+1)(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$

$=(x+1)(x+1)(x-\frac{1}{2})=0$ より

$x=\frac{1}{2}$，重解 $x=-1$.

以上(i)(ii)より

$a=0$　解 $x=0$

$a=4$　解 $x=2,\ 8$

$a=-\frac{1}{2}$　解 $x=-1,\ \frac{1}{2}$

2011年7月進研

B4 2つの整式 $P(x)=(x-3)(2x+a)$ と $Q(x)=x^3-3x^2+bx+c$ がある。$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは -6 であり，$Q(x)$ は x^2+2 で割り切れる。ただし，$a,\ b,\ c$ は定数とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) $Q(x)$ を x^2+2 で割った商を求めよ。また，$b,\ c$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) k を定数とする。x の方程式 $kP(x)+Q(x)=0$ の異なる実数解の個数がちょうど2個であるとき，k の値を求めよ。

（配点　20）

(1) $P(1)=-6$ より

$(1-3)(2+a)=-6$

$2+a=3$

$a=1$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ x^2+2 & x^3-3x^2+bx+c \\ & x^3\qquad\ +2x \\ \hline & -3x^2+(b-2)x+c \\ & -3x^2\qquad\qquad -6 \\ \hline & (b-2)x+c+6 \end{array}$$

よって 商 $x-3$，余り $(b-2)x+c+6$

割り切れるので

$(b-2)x+c+6=0$.

これは x についての恒等式より

$\begin{cases} b-2=0 \\ c+6=0 \end{cases}$

$\therefore b=2,\ c=-6$.

(3) $kP(x)+Q(x)=0$ より.

$k(x-3)(2x+1)+(x-3)(x^2+2)=0$.

$(x-3)(x^2+2kx+k+2)=0$

この解がちょうど2個となるには

$x^2+2kx+k+2=0$ の解が

(i) $x=3$ とそれ以外 となる.

(ii) $x=3$ 以外の重解をもつ となればよい.

$\therefore$(i) $x=3$ とそれ以外の解をもつとき

$3^2+2k\cdot3+k+2=0$.

$\therefore k=-\frac{11}{7}$

このとき $x^2-\frac{22}{7}x+\frac{3}{7}=0$

$7x^2-22x+3=0$

$(7x-1)(x-3)=0\quad\therefore x=3,\ \frac{1}{7}$

よって与えられた条件を満たす

(ii) $x=3$ 以外を重解にもつとき

$x^2+2kx+k+2=0$ の判別式を D とすると

$D/4=k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0\quad\therefore k=-1,\ 2$.

$k=-1$ のとき $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ より 重解 $x=1$.

$k=2$ のとき $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$ より 重解 $x=-2$.

よってともに $x=3$ 以外の重解となる.

以上(i)(ii)より　$k=-\frac{11}{7},\ -1,\ 2$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

2012年7月進研

B4 x の3次式 $P(x)=x^3-(a-1)x^2+3(a-2)x-2a$ がある。ただし，a は実数の定数とする。

(1) $P(x)$ を $x-2$ で割った商を求めよ。

(2) 方程式 $P(x)=0$ の1つの解が $1+2i$ であるとき，a の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

(3) 方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつとする。このとき，$P(x)=0$ の3つの解の平方の和が6であるような a の値を求めよ。

（配点　20）

(1) 剰余の定理より

$P(2)=8-4(a-1)+6(a-2)-2a$

$=\underline{0}$

(2) (1)より $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -a+1 & 3a-6 & -2a & \underline{2} \\ & 2 & -2a+6 & 2a & \\ \hline 1 & -a+3 & a & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)\{x^2-(a-3)x+a\}$ より.

$P(x)=0$ の解の1つが $1+2i$ であるとき

$1-2i$ も解であり、いずれも

$x^2-(a-3)x+a=0$ の解である.

解と係数の関係より

$$\begin{cases} (1+2i)+(1-2i)=a-3 \\ (1+2i)(1-2i)=a \end{cases}$$ より

$a=\underline{5}$

(3) $P(x)=(x-2)\{x^2-(a-3)x+a\}$ より

$P(x)=0$ 解を $2,\ \alpha,\ \beta$ とする.

(α,β は $x^2-(a-3)x+a=0$ の解)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=a-3 \\ \alpha\beta=a \end{cases}$$

条件より 3つの解の平方の和が6なので

$2^2+\alpha^2+\beta^2=6$.

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2$.

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2$.

よって $(a-3)^2-2a=2$.

$a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$　$\therefore a=1,\ 7$.

ここで α,β は虚数解なので

$x^2-(a-3)x+a=0$ の判別式を D とすると

$D=(a-3)^2-4a<0$

$a^2-10a+9<0$

$(a-1)(a-9)<0$

$\therefore 1<a<9$.

よって これを満たすのは $\underline{a=7}$

2013年7月進研

B4 整式 $P(x)=x^3-(k+4)x^2+(2k+5)x+3k+10$（$k$ は実数の定数）がある。

(1) $P(-1)$ の値を求めよ。

(2) 3次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2)のとき，3次方程式 $P(x)=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。

$(\alpha+2\beta)^2+(\beta+2\gamma)^2+(\gamma+2\alpha)^2=11$ となるような k の値を求めよ。

（配点　20）

(1) $P(-1)=-1-(k+4)-(2k+5)+3k+10$

$=\underline{0}$

(2). (1)より

$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ.

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -k-4 & 2k+5 & 3k+10 & \underline{-1} \\ & -1 & k+5 & -3k-10 & \\ \hline 1 & -k-5 & 3k+10 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)\{x^2-(k+5)x+3k+10\}$

$P(x)=0$ が虚数解をもつには

$x^2-(k+5)x+3k+10=0$

が虚数解をもてばよいので 判別式を D とすると

$D=(k+5)^2-4(3k+10)<0$

$k^2-2k-15<0$

$(k+3)(k-5)<0$

$\therefore \underline{-3<k<5}$

(3) (2)より 3つの解は $\alpha,\ \beta,\ -1$ とできる.

α,β は $x^2-(k+5)x+3k+10=0$ の解なので

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=k+5 \\ \alpha\beta=3k+10 \end{cases}$$.

条件より

$(\alpha+2\beta)^2+(\beta-2)^2+(-1+2\alpha)^2=11$ より

$5\alpha^2+5\beta^2+4\alpha\beta-4\alpha-4\beta+5=11$.

$5(\alpha^2+\beta^2)+4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)-6=0$

$5(\alpha+\beta)^2-6\alpha\beta-4(\alpha+\beta)-6=0$

$5(k+5)^2-6(3k+10)-4(k+5)-6=0$

$5k^2+50k+125-18k-60-4k-20-6=0$

$5k^2+28k+39=0$

$(5k+13)(k+3)=0$

$\therefore k=-\frac{13}{5},\ -3$.

$-3<k<5$ より　$k=\underline{-\frac{13}{5}}$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

2014年7月進研

$\boxed{\text{B 4}}$ x の3次式 $P(x)=x^3-4x^2+ax+b$ があり，$P(2)=0$ である。ただし，a，b は実数の定数である。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $P(x)$ を因数分解せよ。また，方程式 $P(x)=0$ が2つの虚数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 方程式 $P(x)=0$ が2つの虚数解をもち，この2つの虚数解が方程式 $x^3+px^2+px+21=0$（p は実数の定数）の解であるとき，a，p の値を求めよ。　　（配点　20）

(1) $P(2)=0$ より

$8-16+2a+b=0$

$\therefore b=-2a+8$

(2) (1)より

$P(x)=x^3-4x^2+ax-2a+8$

$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつので

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & a & -2a+8 & \underline{2} \\ & 2 & -4 & 2a-8 & \\ \hline 1 & -2 & a-4 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-2x+a-4)$

$P(x)=0$ が虚数解をもつには

$x^2-2x+a-4=0$ が虚数解をもてばよい

判別式を D とすると

$D/4=(-1)^2-(a-4)<0$

$-a+5<0$

$\therefore a>5$

(3) 2つの虚数解を α，β とすると

解と係数の関係より

$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta=a-4 \end{cases}$ …①

また $x^3+px^2+px+21=0$ の

3つの解は α，β，γ とできるので

同様に解と係数の関係から

$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \\ \alpha\beta\gamma=-21 \end{cases}$ …②

①と②に代入して

$\begin{cases} 2+\gamma=-p & \cdots③ \\ a-4+2\gamma=p & \cdots④ \\ (a-4)\cdot\gamma=-21 & \cdots⑤ \end{cases}$

③，④より $2+\gamma=-(a+2\gamma-4)$

$\therefore a=-3\gamma+2$ …⑥

⑤より $(-3\gamma-2)\cdot\gamma=-21$

$3\gamma^2+2\gamma-21=0$

$(3\gamma-7)(\gamma+3)=0$　$\therefore \gamma=-3,\ \frac{7}{3}$

$\gamma=-3$ のとき $a=11$，$p=1$

これは $a>5$ を満たす

$\gamma=\frac{7}{3}$ のとき $a=-5$．$a>5$ より これは不適．

よって 以上より $a=11$，$p=1$

2015年7月進研

$\boxed{\text{B 4}}$ x の3次式 $P(x)=x^3+(p-1)x^2+px-q$ があり，$P(1)=0$ である。ただし，p，q は実数の定数である。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) $P(x)$ を因数分解せよ。また，方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような p の値の範囲を求めよ。

(3) (2)のとき，方程式 $P(x)=0$ の2つの虚数解を α，β とする。$\alpha^2=2\beta$ が成り立つとき，p の値を求めよ。　　（配点　20）

(1) $P(1)=0$ より

$1+p-1+p-q=0$ より

$q=2p$

(2) (1)より

$P(x)=x^3+(p-1)x^2+px-2p$

$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつので

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & p-1 & p & -2p & \underline{1} \\ & 1 & p & 2p & \\ \hline 1 & p & 2p & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+px+2p)$

$P(x)=0$ が虚数解をもつには

$x^2+px+2p=0$ が虚数解をもてばよい

判別式を D とすると

$D=p^2-8p<0$

$p(p-8)<0$

$\therefore p<0,\ 8<p$

(3) α，β は $x^2+px+2p=0$ の解なので

$\alpha^2+p\alpha+2p=0$

$\therefore \alpha^2=-p(\alpha+2)$

また解と係数の関係より

$\begin{cases} \alpha+\beta=-p \\ \alpha\beta=2p \end{cases}$

$\alpha^2=2\beta$ より　$-p(\alpha+2)=2\beta$

$\alpha+\beta=-p$ より　$-p(\alpha+2)=2(-p-\alpha)$

$-p\alpha-2p=-2p-2\alpha$

$\alpha(p-2)=0$

α は虚数なので $\alpha\neq0$　よって $p=2$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

2010年7月進研

B5 Oを原点とする座標平面上に円 $C_1 : x^2+y^2=9$ がある。また，点(4，0)を中心とし，半径1の円を C_2 とする。

(1)　円 C_2 の方程式を求めよ。

(2)　直線 $l : 3x+4y-a=0$ (a は正の定数)が円 C_1 に接するとき，a の値を求めよ。また，このとき直線 l と円 C_1 の接点をAとする。点Aの座標を求めよ。

(3)　Pは円 C_2 上を動く点とする。(2)のとき，△OAP の面積の最大値と最小値を求めよ。

(配点　20)

(1)　$(x-4)^2+y^2=1.$

(2)　C_1 は 中心(0.0)．半径3の円

(0.0)と直線 l のキョリを d とすると

$$d = \frac{|3\cdot0+4\cdot0-a|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 \text{ より}$$

$$\therefore \frac{|-a|}{5} = 3$$

$$|-a| = 15$$

$$a = \pm 15$$

$a>0$ より　$a=15$

$l : y = -\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ より．

接点は l と $y=\frac{4}{3}x$ の交点．

$$\therefore \frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$$

$$16x = -9x+45$$

$$25x = 45$$

$$x = \frac{9}{5}$$

$$\therefore y = \frac{12}{5}$$

よって 接点A$\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(3)　OAを底辺とすると．

OAに平行な直線と円 C_2 の交点をPとすると．点PとOAのキョリが三角形の高さとなる

よって△OAPの面積が最大，最小となるのは l に平行で(4.0)を通る直線 m と円 C_2 の交点に点Pが一致するときなので

(4.0)と OA：$y=\frac{4}{3}x$ つまり $4x-3y=0$

のキョリは　$\dfrac{|4\cdot4-3\cdot0|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{16}{5}$

よって 最大値．$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot$ {(OAから(4.0)のキョリ)＋(C_2の半径)}

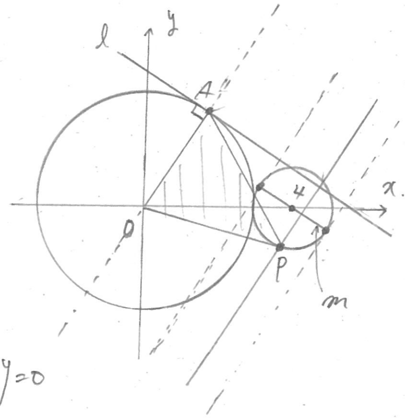
$$= \frac{1}{2}\cdot3\cdot\left(\frac{16}{5}+1\right)$$

$$= \frac{63}{10}$$

最小値　$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot$ {(OAから(4.0)のキョリ)－(C_2の半径)}

$$= \frac{1}{2}\cdot3\cdot\left(\frac{16}{5}-1\right)$$

$$= \frac{33}{10}$$



2011年7月進研

B5 Oを原点とする座標平面上に円 $x^2+y^2-2ax-4y+a^2=0$ (a は定数)　……①と点A(2, 1)がある。

(1)　円①の中心の座標を a を用いて表せ。また，円①の半径を求めよ。

(2)　点Aを通り直線OAに垂直な直線を ℓ とする。直線 ℓ の方程式を求めよ。また，円①の中心が直線 ℓ 上にあるとき，a の値を求めよ。

(3)　方程式①で表される円のうち，(2)で求めた直線 ℓ と接する円は2つある。これら2つの円の中心を C_1，C_2 とする。このとき，$\triangle OC_1C_2$ の面積を求めよ。　(配点　20)

(1)　$x^2+y^2-2ax-4y+a^2=0$

$(x-a)^2+(y-2)^2=4$

中心 $(a, 2)$．半径 2

(2)　直線OAの傾きは $\frac{1}{2}$ より

$l : y-1 = -2(x-2)$

$\therefore y = -2x+5$

①の中心が l 上にあるとき

$2 = -2a+5$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

(3)　中心$(a, 2)$と $l : 2x+y-5=0$

のキョリを d とすると

円と l が接するときは

$$d = \frac{|2a+2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2 = r \text{ より}$$

$$\frac{|2a-3|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$|2a-3| = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore 2a-3 = \pm2\sqrt{5}$$

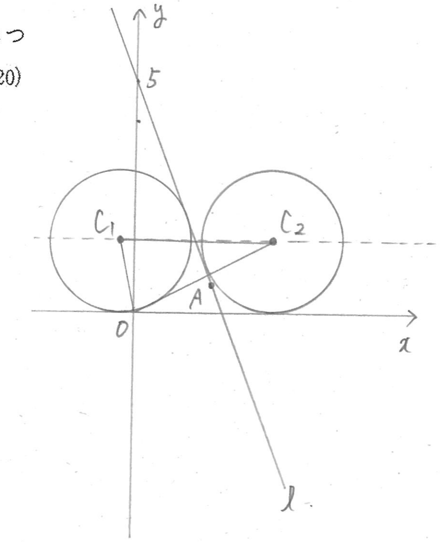
$$2a = 3\pm2\sqrt{5}$$

$$\therefore a = \frac{3\pm2\sqrt{5}}{2}$$

よって $C_1\left(\frac{3-2\sqrt{5}}{2}, 2\right)$　$C_2\left(\frac{3+2\sqrt{5}}{2}, 2\right)$.

より　$\triangle OC_1C_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3+2\sqrt{5}}{2}-\frac{3-2\sqrt{5}}{2}\right)\cdot2$

$$= 2\sqrt{5}$$



(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

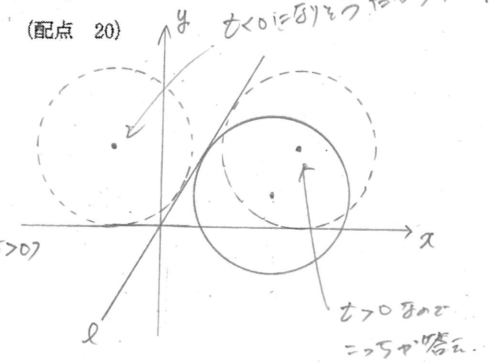
2012年7月進研

B5 座標平面上に円 $C: x^2+y^2-6x-2y+5=0$ と直線 $\ell: y=mx$（m は正の定数）があり，直線 ℓ は円 C に接している。

(1) 円 C の中心と半径を求めよ。

(2) m の値を求めよ。

(3) 円 C と等しい半径の円で，直線 ℓ と x 軸の両方に接する円 K の方程式を求めよ。ただし，円 K の中心の x 座標と y 座標はともに正とする。　（配点　20）



(1). C: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$

中心 $(3, 1)$　半径 $\sqrt{5}$

(2) $\ell: mx-y=0$ より

中心 $(3,1)$ と ℓ のキョリを d とすると

$d=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}=r$

$|3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$(3m-1)^2=5(m^2+1)$

$4m^2-6m-4=0$

$2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0$

∴ $m=-\frac{1}{2}, 2$

$m>0$ より　$m=2$

(3) 求める円は

中心 $(t, \sqrt{5})$　半径 $\sqrt{5}$

とできるので

$(x-t)^2+(y-\sqrt{5})^2=5$　$(t>0)$

と表すことができる。

これが ℓ に接するので

$(t, \sqrt{5})$ と ℓ のキョリを d' とすると（$\ell: 2x-y=0$）。

$d'=\frac{|2t-\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}=r$

$|2t-\sqrt{5}|=5$

$2t-\sqrt{5}=\pm5$

$t>0$ より　$t=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

よって求める円の方程式は

$(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})^2+(y-\sqrt{5})^2=5$

2013年7月進研

B5 座標平面上に3点 A(3, 0)，B(−1, 8)，C(0, 1) がある。

(1) 2点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 3点 A，B，C を通る円 K の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた円 K の点 C を含まない弧 AB 上に点 D をとり，△ABD をつくる。△ABD の面積が 30 であるとき，点 D の座標を求めよ。　（配点　20）

(1) $y-0=\frac{8-0}{-1-3}(x-3)$

$y=-2x+6$

(2) 求める円を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする

3点 A.B.C を通るので

$3l+n+9=0$ …①

$-l+8m+n+65=0$ …②

$m+n+1=0$ …③

①−② より　$4l-8m-56=0$

$l-2m-14=0$ …④

③−② より　$l-7m-64=0$ …⑤

④−⑤ より　$5m+50=0$

∴ $m=-10$

④より　$l+20-14=0$　∴ $l=-6$

③より　$-10+n+1=0$　∴ $n=9$

∴ 求める円は

$x^2+y^2-6x-10y+9=0$

$(x-3)^2+(y-5)^2=25$

(3) 辺ABを底辺、点DからABまでの距離を高さhとする。

$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(8-0)^2}$

$=\sqrt{16+64}$

$=4\sqrt{5}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$ より

$30=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot h$

∴ $h=3\sqrt{5}$　となればよい。

$D(s, t)$ とすると　直線AB $2x+y-6=0$ より

$h=\frac{|2s+t-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3\sqrt{5}$

∴ $|2s+t-6|=15$

よって　$2s+t-6=\pm15$

ここで点Dは直線AB: $y=-2x+6$ の

上側の領域にあるので　$t>-2s+6$　を満たす。

つまり　$2s+t-6>0$　より　$2s+t-6=15$ …①

また点Dは円: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ 上より

$(s-3)^2+(t-5)^2=25$ …②

①: $t=-2s+21$ を②に代入

$(s-3)^2+(-2s+16)^2=25$

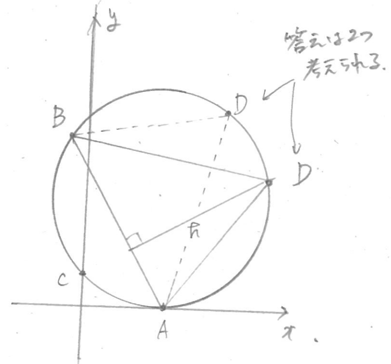
$5s^2-70s+240=0$

$s^2-14s+48=0$

$(s-6)(s-8)=0$

∴ $s=6, 8$

このとき　$t=9, 5$　よって 点D $(6, 9), (8, 5)$



（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

2014年7月進研

B5 Oを原点とする座標平面上に，点A(1, 3)と円 K_1 : $x^2+y^2+4x+2y=0$ がある。また，円 K_1 と半径が等しく，点Oを中心とする円を K_2 とする。

(1) 円 K_2 の方程式を求めよ。

(2) 点Aから円 K_2 に引いた2本の接線と円 K_2 の接点をそれぞれB，Cとする。接点B，Cの座標を求めよ。ただし，点Bの y 座標は点Cの y 座標より大きいものとする。

(3) (2)のとき，直線BCの方程式を求めよ。また，円 K_1 と中心が同じ円で，直線BCから切り取る線分の長さが $2\sqrt{2}$ になる円を K_3 とする。点Pが円 K_3 の周上を動くとき，線分APの長さの最大値を求めよ。

（配点　20）

(1) K_1: $(x+2)^2+(y+1)^2=5$ より

中心 $(-2,-1)$，半径 $\sqrt{5}$

よって K_2: $x^2+y^2=5$

(2) 接点 (s,t) とおくと.

これは K_2 上の点より $s^2+t^2=5$ …①

またこの点における接線は

$sx+ty=5$

これが $(1,3)$ を通るので

$s+3t=5$ …②

②: $s=5-3t$ を①に代入.

$(5-3t)^2+t^2=5$

$10t^2-30t+20=0$

$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

∴ $t=1,\ 2$

②より $s=2,\ -1$

(点Bの y 座標) > (点Cの y 座標) より

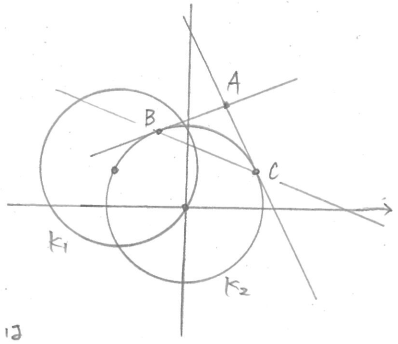
$B(-1,2)$, $C(2,1)$.

(3) 直線BC

$y-2=\frac{1-2}{2+1}(x+1)$

∴ $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

つまり $x+3y-5=0$



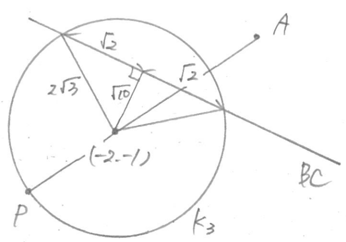
K_3 の半径を r とすると

K_3: $(x+2)^2+(y+1)^2=r^2$

直線BCと中心 $(-2,-1)$ の距離 d は

$d=\frac{|-2-3-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

$r^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2=12$



点Pが K_3 上を動いてAPの長さが最大となるのはAと K_3 の中心 $(-2,-1)$ を通る直線と K_3 の交点のうち，Aから遠い方と点Pが一致するとき。

このとき最大値は

(2点 $(-2,-1)$，$(1,3)$ の距離) + (K_3 の半径 r) なので

$\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}+2\sqrt{3}=5+2\sqrt{3}$

2015年7月進研

B5 座標平面上に，円 C : $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ と直線 ℓ : $y=-2x+9$ がある。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と直線 ℓ の2つの交点A，Bの座標を求めよ。ただし，点Aの x 座標は点Bの x 座標より小さいものとする。また，点Dを中心とする円 K は2点A，Bを通り，点Dと直線 ℓ との距離が円 C の半径の2倍である。円 K の半径を求めよ。

(3) (2)のとき，点Dの座標を求めよ。ただし，点Dは第1象限にあるものとする。

（配点　20）

(1) C: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$

∴ 中心 $(1,2)$　半径 $\sqrt{10}$

(2) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=10\\ y=-2x+9\end{cases}$ より

$(x-1)^2+(-2x+7)^2=10$

$5x^2-30x+40=0$

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

∴ $x=2,\ 4$

このとき $y=5,\ 1$.

よって $A(2,5)$, $B(4,1)$.

点Dから直線 ℓ に垂線を下ろすとその交点は線分ABの中点Mとなる。

$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$ より $M(3,3)$.

$DM=2\cdot\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

$AM=\sqrt{(3-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$ より

円Kの半径は

$r=\sqrt{AM^2+DM^2}$

$=\sqrt{5+40}$

$=3\sqrt{5}$

(3) 点D (s,t) とすると.

点Dは線分ABの垂直二等分線（直線DM）上にある.

直線DM: $y-3=\frac{1}{2}(x-3)$

∴ $x-2y+3=0$

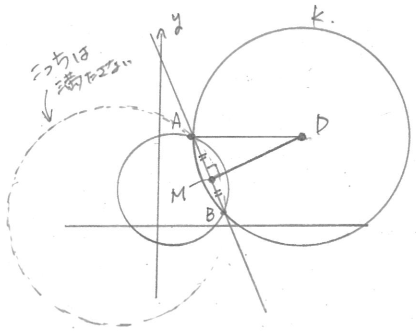
点Dはこの直線上より

$s-2t+3=0$ …①

また $AD=$ (半径 r) より

$AD^2=45$

∴ $(s-2)^2+(t-5)^2=45$ …②



①より $s=2t-3$ を②に代入

$(2t-5)^2+(t-5)^2=45$

$5t^2-30t+5=0$

$t^2-6t+1=0$

∴ $t=\frac{3\pm\sqrt{3^2-1}}{1}=3\pm2\sqrt{2}$

$t=3+2\sqrt{2}$ のとき $s=3+4\sqrt{2}$.

$t=3-2\sqrt{2}$ のとき $s=3-4\sqrt{2}$.

点Dは第1象限より $s>0$, $t>0$

よって $D(3+4\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)